GLOBAL DE GEOMETRÍA 23 – Mayo – 2003

1) **a)** Los puntos A(0,4) y B(4,0) determinan el diámetro de una circunferencia, halla su ecuación.
b) Comprueba que el punto (4,4) está en la circunferencia y halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en este punto. (2 puntos)

2) Calcula el punto simétrico del punto A(1,-1,2) respecto de la recta r: $\begin{cases} x+4y-z=2 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$
(2 puntos)

3) Calcula el ángulo que determinan la recta r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=z+4$ y el plano determinado por los puntos A(1,0,0), B(0,1,2) y C(-1,2,1). (1.5 puntos)

4) Halla el volumen del tetraedro determinado por los puntos de corte del plano
2x – y + 4z – 8 = 0 con los ejes coordenados. (1 punto)

5) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,-1)$ y $\vec{v}=(4,m,2)$
a) Halla, si es posible, el valor de m para los vectores anteriores sean paralelos.
b) Halla, si es posible, el valor de m para los vectores anteriores sean perpendiculares. (1.5 puntos)

6) Estudia la posición relativa de los planos:
$\pi \equiv x+2y-z=2$
$\pi' \equiv 2x-y+3z=1$ (2 puntos)
$\pi'' \equiv 3x-y+4z=0$

SOLUCIONES

1) a) $diametro = d(A,B) = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{32} \rightarrow r = \dfrac{\sqrt{32}}{2}$

$Centro = \left(\dfrac{0+4}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right) = (2,2) \rightarrow C \equiv (x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 \rightarrow \mathbf{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8}$

b) $(4-2)^2 + (4-2)^2 = 8 \rightarrow 8 = 8$, por lo tanto el punto está en la circunferencia.

La recta tangente en (4,4) será perpendicular al radio que pasa por el centro y el punto (4,4). La recta que une el Centro (2,2) y el punto (4,4) tiene de pendiente 1 (estos puntos están en la bisectriz del primer cuadrante), luego la recta tangente tiene de pendiente –1.

$y = -x + n \rightarrow 4 = -4 + n \rightarrow n = 8 \rightarrow$ **y = - x + 8**

2) Los pasos a seguir para hallar el punto simétrico de A son:

a) Ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.

b) Punto de intersección, M, de la recta y el plano.

c) El punto M es el punto medio entre A y su simétrico A´ = (a,b,c)

a) $r \equiv \begin{cases} x + 4y - z = 2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - z = 2 - 4y \\ x + z = 2 + 2y \end{cases}$ resolviendo el sistema queda: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$

el plano perpendicular a r cumple: $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r} = (-1,1,3)$, el plano será –x + y + 3z + d = 0, como pasa por el punto (1,-1,2); –1 – 1 + 6 + d = 0, d = -4, $\pi \equiv -x + y + 3z - 4 = 0$

b) Sustituyendo r en la ecuación del plano, -2 + t + t + 9t – 4 = 0, t = 6/11,

$M = \left(\dfrac{16}{11}, \dfrac{6}{11}, \dfrac{18}{11}\right)$

c) $\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} = \dfrac{16}{11} \\ \dfrac{b-1}{2} = \dfrac{6}{11} \\ \dfrac{c+2}{2} = \dfrac{18}{11} \end{cases} \rightarrow \mathbf{A´ = \left(\dfrac{21}{11}, \dfrac{23}{11}, \dfrac{14}{11}\right)}$

3) La ecuación del plano viene dada por $A(1,0,0), \overrightarrow{AB} = (-1,1,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2,2,1)$

$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3x - 3y + 3 = 0 \rightarrow x + y - 1 = 0 \rightarrow \vec{n_\pi} = (1,1,0)$

$sen(r,\pi) = \cos(\vec{d_r}, \vec{n_\pi}) = \dfrac{|(2,3,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+0}} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}} \rightarrow$ **ángulo = 70º53´36´´**

4) Los puntos de intersección del plano con los ejes se calculan:

$y=0, z=0 \to 2x-8=0 \to A=(4,0,0)$

$x=0, z=0 \to -y-8=0 \to B=(0,-8,0)$ El tetraedro está determinado por los vectores

$x=0, y=0 \to 4z-8=0 \to C(0,0,2)$

$$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\ y\ \overrightarrow{OC} \to V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| = \mathbf{\frac{32}{3}\,u^3}$$

5) a) Para que los vectores sean paralelos deben de ser proporcionales:

$$a\cdot(2,1,-1)=(4,m,2) \to \begin{cases} 2a=4 \\ a=m \\ -a=2 \end{cases} \to a=2 \quad y \quad a=-2 \quad \textbf{Imposible}$$

b) Para que los vectores sean perpendiculares el producto escalar debe ser cero.

$$(2,1,-1)\cdot(4,m,2)=0 \to 8+m-2=0 \to \mathbf{m=-6}$$

c)

$$\cos 60 = \frac{(2,1,-1)\cdot(4,m,2)}{|(2,1,-1)||(4,m,2)|} \to \frac{1}{2}=\frac{6+m}{\sqrt{6}\sqrt{20+m^2}} \to m^2-24m-12=0 \to \mathbf{m=12\pm\sqrt{156}}$$

6) Para conocer la posición relativa se estudian los rango de A y A´.

$$A'=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & -1 & 2 \\ \mathbf{2} & -\mathbf{1} & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0 \to rg(A)=2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \to rg(A')=3$$

Sistema compatible indeterminado. **Los tres planos no se cortan.**

Hay que hacer el estudio de los planos dos a dos:

$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A)=rg(A')=n^o\ incógnitas=2$, **el primer y segundo plano se cortan en una recta.**

$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A)=rg(A')=n^o\ incógnitas=2$, **el primer y tercer plano se cortan en una recta.**

$A'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A)=rg(A')=n^o\ incógnitas=2$, **el segundo y tercer plano se cortan en una recta.**